• 微积分(上)

一、极限

Ⅰ. 基本初等函数：幂指对三反.　　$\ln a^b = b\ln a$ ；$a^x = e^{x\ln a}$

Ⅱ. 数列极限 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 定义：如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

性质：① 若 x_n 收敛，则 x_n 有界 ② 保号性 ③ 收敛数列极限必唯一

Ⅲ. 函数极限定义：如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

▲ 用定义做题时，由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 推出 $|x-x_0|<f(\varepsilon)$ 即 $\delta = f(\varepsilon)$

Ⅳ. 有界函数与无穷小之积是无穷小

Ⅴ. 两个重要极限：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ；$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ $\nearrow$ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ；$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

Ⅵ. 夹逼准则：当 $x\in U(x_0, r)$ 时，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ ；$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$；则 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在且等于 A

Ⅶ. 二项式定理：$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r} b^r$

Ⅷ. 若 $\lim f(x) = A>0$，$\lim g(x) = B$，$\lim [f(x)]^{g(x)} = A^B$

Ⅸ. 未定式的分子或分母是若干个因子乘积时，可对任意因子作等价无穷小代换，若为代数和则不行！

Ⅹ. 常见等价无穷小：

(当 $x\to 0$ 时)

$$\begin{cases} x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3 \\ x\sim \sin x\sim \tan x\sim \arcsin x\sim \arctan x\sim \ln(1+x)\sim e^x-1 ; \\ 1-\cos x\sim \frac{x^2}{2} ; \\ (1+x)^a - 1\sim ax \quad (a\neq 0) \\ a^x - 1\sim x\ln a \quad (a>0, a\neq 1) \end{cases}$$

函数值趋于0时用.

eg. $\sin(\frac{1}{x})\sim\frac{1}{x}$ (√)　$x\to\infty$ 时 $\frac{1}{x}\to 0$ 即可

把 x 变成 $-x$ 全部可以

$-x\sim\ln(1-x)\sim e^{-x}-1$

x；a 可以用式子替代，但像数字 $+1$ 或 -1 不能变，即公式中的字母都能变，数字不行

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{：可去间断点} \\ &\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{：跳跃间断点} \end{aligned}\right\} \text{第一类间断点}$$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 至少一个不存在 $\longrightarrow$ 第二类间断点 (除一类之外全是) $\begin{cases}\text{无穷间断点}\\ \text{振荡间断点}\end{cases}$

二、导数

Ⅰ. $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是左右导数存在且相等.　可导必连续.　|　$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ⅱ. 求导法则：$(\alpha u+\beta v)' = \alpha u' + \beta v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

反函数的导数等于直接函数的导数的导数

Ⅲ. 复合函数求导：$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

Ⅳ. 一般地，求幂指函数 $y = [u(x)]^{v(x)}$ 的导数，可先取对数，得 $\ln y = v(x)\ln u(x)$，再求导.

X. 高阶导数：$(x^n)^{(n)} = n!$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (x > -1)$$

$$(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\cancel{\varphi}[\varphi'(t)]^3}$$

XI 莱布尼茨：$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

XII. 微积分公式

$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$ $\qquad$ $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

$(a^x)' = a^x\ln a$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\quad$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$ $\quad$ $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad$ $(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ $\quad$ $(\tan x)' = \sec^2 x$ $\qquad$ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

$(\sec x)' = \sec x\cdot\tan x$ $\qquad$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

$(\csc x)' = -\csc x\cdot\cot x$ $\qquad$ $\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + C$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\int e^x dx = e^x + C$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$(\text{arccot}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}$ $\qquad$ $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

$(\sinh x)' = \cosh x$ $\qquad$ $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

$(\cosh x)' = \sinh x$

三. 积分

Ⅰ. 不定积分性质

$$\int [u_{(x)} \pm v_{(x)}]\,dx = \int u_{(x)}\,dx + \int v_{(x)}\,dx$$

$$\int k u_{(x)}\,dx = k\int u_{(x)}\,dx$$

Ⅱ ①换元积分法

$$\int f[\varphi_{(x)}]\varphi'_{(x)}\,dx = \left[\int f_{(u)}\,du\right]_{u=\varphi(x)}$$

理解：待求的 $f(x)$ 找出一个 u 满足 $f(x) = g_{(u)}\cdot u'$，求 $\int g_{(u)}du$ 代入 $u=\cdots$ 即为答案

凑成 xxxx $\int g_{(u)}\cdot u'$ 的形式即可

Ⅲ. 常见积分

☆

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

△ 可以套公式，但必须 $(x+\cdots)^2$，即 $d(x+\cdots)=dx$

若不满足上面要加 $d(x^n)$ 的结果

eg. $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C$ < $dx^2=2x$

即 $\int \frac{1}{1+(x^2)^2}dx^2$

Ⅳ. ②第二类积分法.

$$\int f_{(x)}\,dx = \left[\int f[\psi_{(t)}]\psi'_{(t)}\,dt\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

理解：先设一个 $x=\cdots t$，可以使整个式子简化；而后式子变为 $\int\cdots t\,dx$；再由 $x=\cdots t$ 求导得出 $dx=\cdots dt$ 代入原式得到 $\int\cdots t\,dt$ 进行运算，最后把 $t=\cdots x$ 代入即为最终答案.

换元技巧：

☆

① 根式代换：有 $\sqrt{ax+b}$ 直接 $t=\sqrt{ax+b}$

② 三角变换：$\sqrt{a^2-x^2}$ 令 $x=a\sin t$

$\sqrt{a^2+x^2}$ 令 $x=a\tan t$

$\sqrt{x^2-a^2}$ 令 $x=a\sec t$

③ 倒代换：令 $x=\frac{1}{t}$；分子分母是 x 的高次；且分母大于分子

XIII. 中值定理

（证明题从给的式子出发，构造函数是通法，记住这几个式子特点性上面类就行了）

若函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导

① $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$ [罗尔定理]

② $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ [拉格朗日中值定理]

③ $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ [柯西中值定理]

④ $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)$

XIV. 泰勒公式

近似时可忽略.

(1) 麦克劳林：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\left[\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right] \quad (0<\theta<1)$

① $e^x\simeq 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n$

② $\sin x\simeq x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}$

③ $\cos x\simeq 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$

④ $\ln(1+x)\simeq x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

⑤ $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n$

⑥ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$

XV. 洛必达法则：

使用要求：① $g'(x)\neq 0$，在邻域内可导

② 符合特殊型式：$\frac{0}{0}$；$\frac{\infty}{\infty}$；$[0\cdot\infty$；$\infty\pm\infty$；$0^\infty]$ 都能化为前两种！

$e^{v(x)\ln u(x)}=u(x)^{v(x)}$ $\quad e^{\ln y}=y$

XVI. 凹凸性

$f(x)$ 在I内可导，$f'(x)$ 单调增加（或 $f''(x)>0$），则 $f(x)$ 是凹函数（或下凸）

$f'(x)>0$，单调递增↗；$f'(x)<0$，单调递减↓

$f'(x)=0$ 极值点 $\begin{cases} f''(x_0)<0 & \text{极大值} \\ f''(x_0)>0 & \text{极小值} \end{cases}$

$f'(x)=0$ 左右 $f'(x)$ 符号不变则不是极值点

XVII. 曲线的曲率

$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad$ 曲率半径：$R=\dfrac{1}{K}$

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \Rightarrow K=\dfrac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$

④ 指数代换：适用于被积函数 a^x 构成的代数式

⑤ 万能代换（半角代换）：被积函数是三角有理式，令 $t=\tan\frac{x}{2}$.
$$\begin{cases} \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt \end{cases}$$

⑥ 根据指数最小公倍数法代换，令 $t=\sqrt[n]{x}$

V. 分步积分

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

① v 要容易求出 ② $\int v\,du$ 要比 $\int u\,dv$ 容易求出

VI. 有理函数不定积分，即 $\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$ 的分式型式.

方法：① 提出有理项，使 x^n 的次数小于 x^m

② 把分母分解因式，拆成分式和的形式 $\frac{A}{x+a}$ 或 $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

③ 算出系数，各部分分开求解.

- 三角万能公式

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}\ ; \qquad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$du=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$，即 $dx=\frac{2}{1+u^2}du$.

$x=2\arctan u$.

VII. 定积分

① 当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

② $\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a) \quad (a\le\xi\le b)$ [积分中值公式]

VIII. 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 可导，则

☆ $\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right)'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$

IX. 定积分换元和分布积分.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$

[换元公式] ▲换元要换限

▲ $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1-2\sin^2 a = \cos^2 a-\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\cos a\sin a$.

若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，且为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$

四. 微分方程.

I. 一阶线性微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right) \quad \cdots ①$$

若有条件 $y|_{x=x_0}=y_0$，则①式中所有 $\int$ 变为 $\int_{x_0}^{x}$

分子分母未知数的次数是一样的.

齐次型方程： $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

方法：① 换元，令 $u=\frac{y}{x}$，有 $y=ux$； $\frac{dy}{dx}=u+xu'$ 代入原式

② 得 $u+xu'=\varphi(u)$

③ 分离变量后积分. $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$.

可化为齐次型方程 ① $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ $\left(\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}\right)$ （$C=C_1=0$ 是齐次，否则非齐次） 划去为0

方法：① 化为齐次型，代换 $x=X+h$，$y=Y+k$.

$$\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases} \Rightarrow \text{解出 } h, k$$

② 式子化为齐次型 $\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$

③ 解完后代回原式 x, y 即得结果

② 若 $\left(\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda\right)$ 则方程化为

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by)$$

令 $u=ax+by$，则 $\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx}-a\right)$

代入原式，原式化为 $\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx}-a\right)=f(u)$

分离变量求解.

伯努利方程： $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{a}$ $(a\neq 0,1)$

方法：① 同除 y^a 有 $y^{-a}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-a}=Q(x)$

② 作代换 $z=y^{1-a}$，原式： $\frac{dz}{dx}+(1-a)P(x)z=(1-a)Q(x)$

③ 分离变量同时积分求解，也可直接用通解公式，之后再将原式代入z（看是何形式）

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

▲ $$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

☆ $$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \quad \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & \text{当 } n \text{ 为大于1的正奇数} \end{cases}$$

X. 定积分应用

- 平面面积计算，选取合适的积分变量可用于简化。
- 极坐标：$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\varphi(\varphi)]^2\,d\varphi$

体积：$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2\,dx$ 算实心圆柱

$= \int_a^b \pi [g(y)]^2\,dy$

弧长：曲线弧段 $y = f(x)\ (a \le x \le b)$ 的长度 $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ 线性方程

曲线弧段 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 的长度 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2_{(t)} + \psi'^2_{(t)}}\,dt$ 参数方程

曲线弧段 $\rho = \rho_{(\varphi)}\ (\alpha \le \varphi \le \beta)$ 的长度 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2_{(\varphi)} + \rho'^2_{(\varphi)}}\,d\varphi$ 极坐标

- 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}\ (0 \le t \le 2\pi) \Longrightarrow$ 离心率 $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

XI. 平均值

- 算术平均值：$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

加权平均值：$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x)w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}$ （$f(x)$ 是一般函数，$w(x)$ 是权函数）

均方根平均值：$\bar{I} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx}$

Ⅱ. 可降阶的二阶微分方程

(1) $y''=f(x)$ 型

方法：① 两边积分，$y'=\int f(x)dx$

② 再次积分得出结果.

(2) $y''=f(x,y')$ 型

方法：① 设 $y'=p$，原式化为 $p'=f(x,p)$

② 分离变量后同时积分.

③ 将 $p=y'$ 代回后，再重复②操作.

(3) $y''=f(y,y')$ 型

方法：① 设 $y'=p$，则 $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$

② 原式化为：$p\cdot\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

③ 按一阶解法同时积分进行求解.

Ⅲ. 线性微分方程解的结构

[二阶线性微分方程：$\underbrace{\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y}}_{L(y)}=f(x)$]

若 $f(x)\equiv 0$ 称为齐次，反之不齐次.

齐次：① 若 y_1 与 y_2 是齐次方程的 2 个特解，那么 $y=C_1y_1+C_2y_2$（C_1,C_2 为任意常数）是通解

非齐次：② 若 y^* 是非齐次的 1 个特解，$Y=C_1y_1+C_2y_2$ 是令 $f(x)=0$ 变为齐次的 1 个通解，那么 $y=Y+y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程的通解.

③ 若方程右端 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$，是几个函数的和.

而 y_k^* 是方程 $L(y)=f_k(x)$ 的特解

那么 $y_1^*+y_2^*+\cdots+y_n^*$ 是原方程的特解.

(4) 若 $y_1,y_2\cdots y_n$ 是非齐次方程 $y^{(n)}+P_1(x)y^{n-1}+\cdots+P_n(x)y=f(x)$ 所对应的齐次微分方程的 n 个线性无关的解，且 y^* 是 $\cdots=f(x)$ 的某个特解，那么

$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n + y^*$ 为非齐次微分方程的通解，其中C为任意常数.

IV (1) 二阶常系数线性微分方程.

$$y'' + py' + qy = 0$$

求通解方法：① 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

② 求出特征方程的2个根 r_1，r_2

③ 若为2不等实根，则 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

若为2相等实根 $r_1 = r_2$，则 $y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$

若为一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，则 $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

$\Rightarrow$ 推广到n阶常系数齐次性微分方程：$y^{(n)} + P_1y^{(n-1)} + P_2y^{(n-2)} + \cdots + P_ny = 0$

解如下：

	特征方程的根	通解中对应项
单根	实根 r	给出一项：Ce^{rx}
	共轭复根 $r = \alpha \pm i\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$
重根	k重实根 r	给出k项：$e^{rx}(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})$
	k重共轭复根 $r = \alpha \pm i\beta$	给出2k项：$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \cdots + C_kx^{k-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2 + \cdots + D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

(2) 二阶常系数非齐次线性微分方程.

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解：$y'' + py' + qy = 0$ 的通解加上它本身的一个特解 y^*.

求特解 y^* 的方法：I. ① 若 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$，则特解 $y^* = x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$

[注：$Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次多项式；$k=0$（λ不是特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根）或 $k=1$（λ是特征方程的单根）或 $k=2$（λ是特征方程的重根）]

如 $P_{(m)} = 2x \Rightarrow Q_{(m)} = ax+b$

如 $P_{(m)} = x^2 \Rightarrow Q_{(m)} = ax^2+bx+c$ → ② 将 $Q_m(x)$ 设为与 $P_m(x)$ 同次，$a_1x^m + a_2x^{m-1} + \cdots + a_m$ 形式代入 y^*

③ 将 y^* 代回原式消未知数，得出结果.

Ⅱ. ①若 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx + P_n(x)\sin wx]$

通解：齐次的通解加上它本身的特解。

求特解：$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos wx + R_m^{(2)}(x)\sin wx]$

[注：$R_m^{(1)}$、$R_m^{(2)}$ 是m次多项式，$m = \max\{l, n\}$；$k = 0$（$\lambda + iw$ 或 $\lambda - iw$ 不是特征方程的根）或 $k = 1$（是特征方程的单根）]

Ⅴ. 高阶变系数线性微分方程

(1) 解二阶变系数微分方程 $y'' + P(x)y' + q(x)y = f(x)$

方法：① 先猜出一个非零解。

② 令 $y = u\cdot$非零解，求出 y'，y'' 并代入原式。

③ 解得 u 的高次微导数等式，如 $u'' = \cdots$

④ 积分得到 $u = \cdots$

⑤ 代入 $y = u\cdot$非零解 即为答案。

(2) 解欧拉方程的指数代换法

$$x^n y^{(n)} + P_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} x y' + P_n y = f(x) \quad [欧拉方程]$$

方法：① 令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$ （在 $x > 0$ 的区间内）

② $x^k y^{(k)} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y$

③ 将上式代入欧拉方程可得，$(aD^n + bD^{n-1} \cdots nD)y = f(x)$

④ 由③中式子得特征方程并求根，并得其通解。

⑤ 再求其一个特解。

⑥ 通解 + 一个特解 即为欧拉方程通解。

微积分A（下）

五. 向量代数与空间解析几何

I. 方向角：$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$；$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$；$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$

方向余弦：$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

单位向量：$\vec{e_a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

II. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$ [$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以a, b为邻边的平行四边形的面积]

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

混合积：$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ [其绝对值是以a、b、c为相邻三棱的平行六面体的体积]

- 三向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$共面的充要条件：$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0$ 即 $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$

III. 平面.

①方程：过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$且以$\vec{n} = (A, B, C)$为法向量的平面方程

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$ [点法式]

展开 $\Rightarrow$ $Ax + By + Cz + D = 0$ [平面一般方程]

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ （a, b, c是平面在x, y, z轴上的截距）[截距式方程]

②面夹角：两平面法向量分别为$\vec{n_1}$，$\vec{n_2}$，两面的夹角θ（锐角）（抓法向量研究面面关系）

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right|$$

③点面距：面外一点P_0，面上一点P_1，$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$ （$\vec{n}$为平面的法向量）

点$P_0(x_0, y_0, z_0)$到平面$Ax + By + Cz + D = 0$的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

④点线距：点$P_0(x_0, y_0, z_0)$到直线$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$的距离$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$

IV. 直线.

过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且以 $\vec{s}(m, n, p)$ 为方向的直线 L 方程.

(1) $\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ (参数方程) $\Rightarrow$ (2) $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ 对称式 (点向式)

(m, n, p) 方向向量

过两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程.

(3) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (两点式方程)

两个面的交线

(4) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ 不成立. 一般方程 (面交式)

方向向量 $\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

(5) 把点向式分解成 2 个等式.

$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} - \dfrac{y-y_0}{n} = 0 \\ \dfrac{x-x_0}{m} - \dfrac{z-z_0}{p} = 0 \end{cases}$ (一般式)

- 两直线夹角

$\cos\varphi = \left|\dfrac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{|\vec{s_1}| \cdot |\vec{s_2}|}\right|$

- 直线与平面夹角

$\sin\varphi = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$

- 过直线的平面束 (由一般方程得到)

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

V. 曲线和曲面

曲面

(1) 柱面: $F(x, y) = 0$ [不完全的三元方程 (x, y, z) 不同时出现, 则表示柱面]

① 此方程为准线方程 ② 缺什么就是母线平行于什么 (空间解析几何中缺字母的方程 ⇒ 柱面)

(2) 旋转曲面: $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$ (绕 z 旋转)

① 由曲线方程 $f(y, z) = 0 \Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$

② 绕哪个轴旋转哪个值不变 ③ 变化的变为 $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ (剩下的 2 个值)

(1) 曲线一般方程

$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ (两曲面的交线)

(2) 曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

☆(3) 空间曲线在坐标面上的投影.

$$\begin{cases} H(x,y) = 0 & \rightarrow \text{把曲线一般方程联立消去不相关的那个字母} \\ z = 0 & \rightarrow \text{在哪个面上的投影，不相关的那个字母} = 0 \end{cases}$$ （在 xOy 面上的投影）

方法：① 先消 z ② 联立 $z=0$ 即可.

VI. 二次曲面.

体积 $V = \frac{4}{3}\pi abc$

(1) 椭球面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a>0, b>0, c>0)$

$z^2 = a(x^2+y^2)$

(2) 抛物面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$ [椭圆抛物面]

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$ [双曲抛物面]（鞍形面）

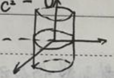
$z = a(x^2+y^2)$

(3) 双曲面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ [单叶双曲面]

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ [双叶双曲面]

(4) 椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

(5) 圆柱面：$x^2+y^2=R^2$



六. 多元函数微分学.

I. 多元函数的基本概念.

$R^n = \{(x_1, x_2, \cdots x_n) \mid x_k \in R;\ k=1,2\cdots n\}$ 表示 n 元有序实数组的全体构成的集合.

R^n 中两点距离：$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$

• 二元函数极限定义：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，只要 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$，就有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称当 $(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 极限存在，极限值为 A. 否则，极限不存在.

沿任意曲线趋近

• 连续性定义：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续。若 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点皆连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

└极限值 = 函数值

II. 偏导数与全微分.

• $f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 对 x 的偏导数 → 考试此类题先写定义 $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x_0,y_0)$

若 $f_{xy}(x,y)$ 与 $f_{yx}(x,y)$ 在 D 内连续，那么 $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

- 全增量 $\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow \Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

全微分 $\Rightarrow dz = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$ [可微条件：连续、可偏导]

$F''_{uv} = F''_{vu}$

- 复合函数：① $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$ [中间变量单元] $z < \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \times \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$（复合结构图）

② $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$ [中间变量多元]

分叉写 ∂，不分叉写 d

标答写 1, 2 不写 u, v.

Ⅲ、隐函数求导

- $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ [条件：①有连续偏导 ② $F(x_0, y_0) = 0$；$F_y(x_0, y_0) \neq 0$]（二元）

- $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ [条件：①有连续偏导 ② $F(x_0, y_0, z_0) = 0$；$F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$]（三元）

∴ 总之，别把隐函数看得有什么特殊，该怎么求就怎么求，只是有复合的按复合函数求导，最后结果化简即可．牢记1元的方法照搬

无需强记隐函数求导公式，直接省略．

△高阶偏导数

不论z对谁求导，也不论z求了几阶导，求导之后的新函数仍与z有完全相同的复合结构．

- 例：$F(u,v)$，$z = F(\frac{y}{x},\ x^2+y^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$F(u,v)$ 二阶连续

$F''_{12} = F''_{21}$

解：$z = F < \begin{matrix} 1\ \frac{y}{x} \\ 2\ x^2+y^2 \end{matrix} \times \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$

$$\begin{cases} \frac{\partial F'_1}{\partial y} = F''_{11}\cdot\frac{1}{x} + F''_{12}\cdot 2y \\ \frac{\partial F'_2}{\partial y} = F''_{21}\cdot\frac{1}{x} + F''_{22}\cdot 2y \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F'_1\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2\cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(F'_1\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right)}{\partial y} + \frac{\partial(F'_2\cdot 2x)}{\partial y}$$

$$= \left(F''_{11}\cdot\frac{1}{x} + F''_{12}\cdot 2y\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_1\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x\cdot\left(F''_{21}\cdot\frac{1}{x} + F''_{22}\cdot 2y\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}F'_1 - \frac{y}{x^3}F''_{11} + \left(2 - \frac{2y^2}{x^2}\right)F''_{12} + 4xy\,F''_{22}$$

△ 多元函数极值最值.

I. 无条件极值 $z=f(x,y)$

(1) 必要条件：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处 $\begin{cases}\text{一阶偏导存在}\\\text{取极值}\end{cases}$，则 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$ [适用二元及以上]

(2) 充分条件：
$$\left.\begin{aligned}f''_{xx}(x_0,y_0)&=A\\f''_{xy}(x_0,y_0)&=B\\f''_{yy}(x_0,y_0)&=C\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Delta=B^2-AC\begin{cases}<0\begin{cases}A>0\Rightarrow \text{极小值点}\\A<0\Rightarrow\text{极大值点.}\end{cases}\\>0\Rightarrow\text{不是极值点,}\\=0\Rightarrow\text{该法失效，另谋他法}\end{cases}$$
[只适用于二元]

• 例：$z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+32=0$ 确定，讨论其极大值和极小值.

无条件极值的解题程序

① 给出 $z=z(x,y)$ （显式）

② $z=z(x,y)$ 由 $F(x,y,z)=0$ 确定 （隐式）

程序均为：(1) 写 $\begin{cases}z'_x\\z'_y\end{cases}$ 并令 $\left.\begin{matrix}z'_x=0\\z'_y=0\\\text{原方程式}\end{matrix}\right\}\Rightarrow P_i\ (i=1,2\cdots n)$ [备选点]

(2) 写 $\left.\begin{cases}z''_{xx}\\z''_{xy}\\z''_{yy}\end{cases}\text{把}P_i\text{代入}\right\}\Rightarrow\begin{cases}A_i\\B_i\\C_i\end{cases}$ 令 $\Delta_i=B_i^2-A_iC_i$

(3) 由上述 △ 公式来判断极值点.

解：1° 对 x 求偏导

$$2x-6y-2yz'_x-2z\cdot z'_x=0\Rightarrow 2x-6y-2(y+z)z'_x=0$$

对 y 求偏导

$$-6x+20y-2z-2y\cdot z'_y-2z\cdot z'_y=0\Rightarrow -6x+20y-2z-2(y+z)z'_y$$

令 $z'_x=0$，$z'_y=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-3y=0\\-3x+10y-z=0\\x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+32=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=12\\y=4\\z=4\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-12\\y=-4\\z=-4\end{cases}$$

$$2°\begin{cases}x-3y-(y+z)\cdot z'_x=0\quad\cdots(1)\\-3x+10y-z-(y+z)z'_y=0\cdots(2)\end{cases}$$

对(1)两边再求x偏导. $\Rightarrow 1-z'_xz'_x-(y+z)z''_{xx}=0$

$-3-(1+z'_y)z'_x-(y+z)z''_{xy}=0$

对(1)两边再求y偏导 $\Rightarrow$

对(2)式求y偏导 $\Rightarrow 10 - z_y' - (1+z_y')z_y' - (y+z)z_{yy}'' = 0$

将 $\begin{cases} z_x'=0 \\ z_y'=0 \end{cases}$ 代入上面三式有

$$\begin{cases} z_{xx}'' = \dfrac{1}{y+z} \\ z_{xy}'' = \dfrac{-3}{y+z} \\ z_{yy}'' = \dfrac{10}{y+z} \end{cases}$$

将上述2个点代入 $P_1 \begin{cases} A_1 = \frac{1}{8} \\ B_1 = -\frac{3}{8} \\ C_1 = \frac{5}{4} \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = B_1^2 - A_1C_1 = -\frac{1}{64} < 0 \\ A_1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (12, 4)为极小值点 $4 = z = z_{(12,4)}$

$P_2 \begin{cases} A_2 = -\frac{1}{8} \\ B_2 = \frac{3}{8} \\ C_2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} \Delta_2 = -\frac{1}{64} < 0 \\ A_2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (−12, −4)是为极大值点 $z = z_{(-12,-4)} = -4$是极大值

[极值是局部概念，不是最大最小值]

例：求 $f(x,y) = x^2(2+y^2) + y\ln y$ 的极值

解：1° $\begin{cases} f_x'(x,y) = 2x(2+y^2) \\ f_y'(x,y) = x^2 \cdot 2y + \ln y + 1 \end{cases}$ 令 f_x', f_y' 为0 $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$ （唯一解）

名定义域 $\ln y$ 存在 $\Rightarrow y > 0$

2° $\left.\begin{array}{l} f_{xx}''(x,y) = 2(2+y^2) \\ f_{xy}''(x,y) = 4xy \\ f_{yy}''(x,y) = 2x^2 + \frac{1}{y} \end{array}\right\} \xrightarrow{代值} \begin{cases} A = 2(2+\frac{1}{e^2}) \\ B = 0 \\ C = e \end{cases}$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta = B^2 - AC = -2e(2+\frac{1}{e^2}) < 0 \\ A > 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ 极小值，在 $(0, \frac{1}{e})$ 取极小值 $f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$

II. 条件极值（最）

求目标函数 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件 $\begin{cases} \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 下的极值（最）.

方法 —— 拉氏乘数法

(1) 构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z)$. 5个变量

(2) 令 $F_x' = 0$, $F_y' = 0$, $F_z' = 0$, $F_\lambda' = 0$, $F_\mu' = 0$

(3) 解方程组 $\Rightarrow \underset{备选点}{P_i(x_i, y_i, z_i)} \Rightarrow u(P_i)$，比较 $\Rightarrow$ 取最大，最小者为最大、最小值.

☆重难点.

例：求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最值.

解：作 $F(x,y,z,\lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2+y^2+z^2-10)$

$$\begin{cases} F_x' = y + 2\lambda x = 0 \cdots (1) \\ F_y' = x + 2z + 2\lambda y = 0 \cdots (2) \\ F_z' = 2y + 2\lambda z = 0 \cdots (3) \\ F_\lambda' = x^2+y^2+z^2-10 = 0 \cdots (4) \end{cases}$$

令 $\lambda=0$, $y=0$

① $\Rightarrow A(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$

$B(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ [者出一组解]

解方程过程不写答题卡上.

② 消元 —— 先搞死最复杂的平方项(4)

$(1)x + (2)y + (3)z - (4) \Rightarrow 10\lambda + xy + 2yz = 0$

令 $\lambda \neq 0$, $(1) \Rightarrow \lambda = \frac{-y}{2x}$ $(3) \Rightarrow \lambda = -\frac{y}{z}$ 故 $2x = z$ 代入 (2) (4)

$(2) \Rightarrow \lambda = -\frac{5x}{2y}$ $(4) \Rightarrow 5xy - 25\frac{x}{y} = 0 \Rightarrow 5xy^2 - 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{5} \\ x = \pm 1 \end{cases}$ 代入式

$\Rightarrow C(1, \sqrt{5}, 2)$ $D(-1, \sqrt{5}, -2)$ $E(1, -\sqrt{5}, 2)$ $F(-1, -\sqrt{5}, -2)$ 共6组解.

解之，得：A, B, C, D, E, F 6个点

依次代入，$u = xy + 2yz \Rightarrow u_{max} = 5\sqrt{5}$，$u_{min} = -5\sqrt{5}$.

解方程 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$，$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ [克拉默法则]

- 方向导数：若 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微，对于任一单位向量 $\vec{e_l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 沿 l

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

- 梯度：$\nabla f(x_0, y_0) \longrightarrow$ 方向：方向导数最大的方向；模：导数最大值. $\nabla f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{e_l}$$

- 曲线在点 M_0 处的切线：$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$ 切向量 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

垂直于切线的法平面：$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0)$

曲面的切平面：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$

曲面的法线：$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

七. 重积分.

$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$

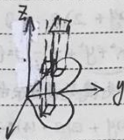
△ 对称性

(1) 普通对称性

1° 若 $f(x,y) = f(-x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma$.

如 $\cos x \sin y = \cos(-x)\sin y$ [偶倍]

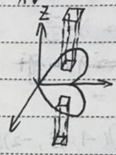
[若 $f(x) = f(-x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$]



2° 若 $f(x,y) = -f(-x,y) \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = 0$

如 $\sin x \cos y = -\sin(-x)\cos y$ [奇零]

[若 $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$]



(上下抵消)

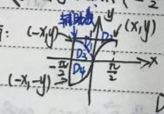
▲ x轴，y轴对称也类似相同，直推即可.

3° 关于原点对称

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma, & f(x,y) = f(-x,-y) \\ 0, & f(x,y) = -f(-x,-y) \end{cases}$$

例：设平面区域 D 由 $y = \sin x \ (-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$，$x = -\frac{\pi}{2}$，$y = 1$ 围成，则 $\iint\limits_D (xy^3 - 1)\,d\sigma =$

解：作图 D 有：



$\iint\limits_D (xy^3 - 1) = \iint\limits_D xy^3 - \iint\limits_D d\sigma$

辅助线：$y = -\sin x$

D_1 与 D_2：$f(x,y) = -f(-x,y)$，$xy^3 = (-x)y^3$

D_3 与 D_4：$f(x,y) = -f(x,-y)$，$(-x)y^3 = -(-x)(-y)^3$

方法：把对称点带进去，相等即2倍，相反即为0.

(2) 轮换对称性.

- 积分值与用何字母表示无关. [同理，适用于 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$]

$$\iint\limits_{D_1: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\le 1} (2x^2+3y^2) = \iint\limits_{D_2: \frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{4}\le 1} (2y^2+3x^2)$$

- 定义：若将 D 中的 $x \xleftrightarrow{\text{对调}} y \Rightarrow$ 发现D不变，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(y,x)\,dxdy$ [轮换区域D不变] D关于 $y=x$ 对称.

例：平面区域 $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\}$，计算如下二重积分.

(1) $I_1 = \iint\limits_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)}\,d\sigma$，其中 $f(t)$ 为 R上的连续正值函数，$a, b > 0$

(2) $I_2=\iint\limits_D(e^{\lambda x}-e^{-\lambda y})\,d\sigma,\quad \lambda>0.$

解：(1) $x\longleftrightarrow y\Rightarrow D$不变，则

$$I_1=\iint\limits_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\,d\sigma=\iint\limits_D\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}\,d\sigma$$

$$\Rightarrow 2I_1=\iint\limits_D\frac{(a+b)(f(x)+f(y))}{f(x)+f(y)}\,d\sigma=(a+b)\iint\limits_D 1\,d\sigma=(a+b)\cdot S_D=2(a+b)$$

$$\Rightarrow I_1=a+b$$

(2) $$I_2=\iint\limits_D(e^{\lambda x}-e^{-\lambda y})\,d\sigma=\iint\limits_D(e^{\lambda y}-e^{-\lambda x})\,d\sigma.$$

$$\Rightarrow 2I_2=\iint\limits_D[(e^{\lambda x}-e^{-\lambda x})+(e^{\lambda y}-e^{-\lambda y})]\,d\sigma$$

$$=\iint\limits_D(e^{\lambda x}-e^{-\lambda x})\,d\sigma+\iint\limits_D(e^{\lambda y}-e^{-\lambda y})\,d\sigma.$$

D关于y对称，由于普通对称性，$f(x,y)=-f(-x,y)\Rightarrow$ 值为0.

$$\Rightarrow I_2=0.$$

[例1] 设$f(x)$为恒正的连续函数，证明 $\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,dx\geqslant(b-a)^2$，其中$a<b$

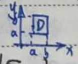
解：[方法1] 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\cdot\int_a^x\frac{1}{f(t)}\,dt-(x-a)^2$

$$F'(x)=f(x)\cdot\int_a^x\frac{1}{f(t)}\,dt+\int_a^x f(t)\,dt\cdot\frac{1}{f(x)}-2(x-a)$$

$$=\int_a^x\left(\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}\right)dt-2(x-a).\geqslant\int_a^x 2\,dt-2(x-a)=0$$

$$\Rightarrow F'(x)\geqslant 0\Rightarrow F(x)\text{单增}\Rightarrow F(b)\geqslant F(a)=0\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,dx-(b-a)^2\geqslant 0$$

[方法2] 显然 $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(y)\,dy$



$$\left.\begin{aligned}&\text{左}=\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}\,dy=\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\,d\sigma\\&\text{左}=\int_a^b f(y)\,dy\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,dx=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}\,d\sigma\end{aligned}\right\}\Rightarrow\text{左}=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\geqslant\iint\limits_D 1\,d\sigma=S_D=(b-a)^2$$

[例2]（会求，记住） 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$

解：显然，$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\,dy=I$

$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}\,dy=\iint\limits_{D(\text{全平面})}e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r\,dr$$

$$=2\pi\cdot-\frac{1}{2}\cdot e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}=-\pi\cdot(0-1)=\pi.$$

$$\Rightarrow I=\sqrt{\pi}.$$

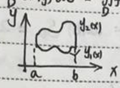
△计算.

定义 即 $dx, dy > 0$

$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$，$[\,d\sigma > 0\,]$

(I) 直角坐标系 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

(1) X型区域：

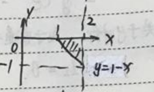


$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$. $[\,a<b,\ y_1<y_2\,]$

口决：后积先定限，限内画条线，先交写下限，后交写上限.

(2) Y型区域：$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$. $[\,c<d,\ x_1<x_2\,]$

[例1]（真题）交换 $\int_{-1}^{0} dy \int_{2}^{1-y} f(x,y)\,dx$ 的积分次序为 .



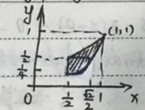
解：确认（修改为）$dx>0, dy>0$.

原式 $= -\int_{-1}^{0} dy \int_{1-y}^{2} f(x,y)\,dx \Rightarrow -\int_1^2 dx \int_{1-x}^{0} f(x,y)\,dy$.

$\int e^{x^2}dx$，$\int e^{-x^2}dx$，$\int \frac{\cos x}{x}dx$，$\int \frac{\sin x}{x}dx$ 易做.

[例2] 计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx$

解：

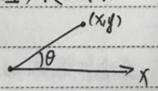


换积分类型有：

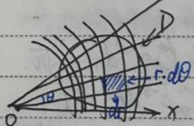
$\int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{x} e^{\frac{y}{x}}dy$.

$= e\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \underbrace{xe^{x}}_{\text{分部积分法}} = \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

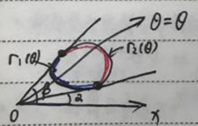
(II) 极坐标系



$$\begin{cases} r^2 = x^2+y^2 \\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$



故 $d\sigma = r\,d\theta \cdot dr$.



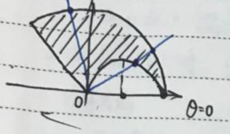
$I = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$

[例1]：计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$，其中D由 $y=-x$，$x^2+y^2=4$，$y=\sqrt{2x-x^2}$ 所围成的在一二象限

解：（画图于草稿纸上）

[分析：$\boxed{\text{选择极坐标系情形}}$] ① 当被积函数含 $f(x^2+y^2)$，且 D 为圆的部分时，一般选极坐标系（首要考虑的是 $f(x^2+y^2)$）

② 否则，一般选择直角坐标系.



$$x^2+y^2=2x \Rightarrow r^2=2r\cos\theta \Rightarrow r=2\cos\theta$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^2\cdot r\,dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^2 r^2\cdot r\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-4\cos^4\theta)\,d\theta+\pi$$

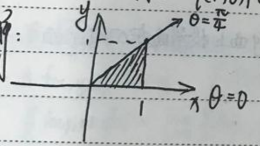
$$=3\pi-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=3\pi-4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{9}{4}\pi.$$

[例 2] 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\;r^2\sin\theta\,dr\,d\theta$

其中 $D=\left\{(r,\theta)\mid 0\le r\le\sec\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$

解：



$$r=\frac{1}{\cos\theta}\Rightarrow r\cos\theta=1\Rightarrow x=1$$

$$I=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2+y^2}\;y\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\;y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1dx\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\,d(y^2-x^2+1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^1\left[(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=x}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx \qquad 令\ x=a\sin t\quad a=1$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2t)^{\frac{3}{2}}\cdot d\sin t$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3t\cdot\cos t\,dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\,dt$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

[注] ① 选 x 区域，y 区域想哪种利于凑微分.

I 三重积分（

[2] 柱面坐标系

把曲面方程中的z用r来表示

在xoy投影区域任取一点，作z平行线，交于上下界方程，并用r的式子表示

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,d\theta\, dr\, dz = \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,dr}_{\text{在xoy面投影用极坐标表示}} \underline{\int_{z(r_1)}^{z(r_2)}} f(x,y,z)\, dz.$$

[3] 球面坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r: \text{以原点为中心球面} \\ \theta: \text{原点为顶点，z为轴的圆锥面（z轴与其图形夹角）} \\ \varphi: \text{过z轴半平面.} \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi$$
$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Ⅱ. 曲面面积

空间平面法向量 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，设平面面积 S 与其在 xOy 面上投影面积 σ 有

$$S = \frac{1}{|\cos\gamma|}\sigma.$$

空间曲面 Σ：$z = z(x,y)$，$(x,y)\in D$ 的面积公式

$$S = \underset{\text{在一个面上投影，例如xoy}}{\iint_D} \sqrt{1 + \underbrace{z_x^2(x,y) + z_y^2(x,y)}_{\text{对x, y求偏导}}}\, d\sigma$$

Ⅲ. 质心坐标

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\,\mu(x,y,z)\,dV}{\iiint_{\Omega} \mu(x,y,z)\,dV}$$，$\bar{y}$、$\bar{z}$ 同理得.

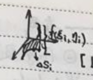
Ⅳ. 转动惯量

$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2+z^2)\,\mu(x,y,z)\,dV$，$I_y, I_z, I_0$ 同理得.

八. 曲线积分和曲面积分.

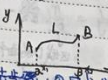
Ⅰ 第一类曲$\boxed{线}$积分. (曲线构件的质量)

$\int_L f(x,y)\,ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta S_i$



[L为xoy上的曲线, ΔS为$\Delta L\to 0$, $f(\xi_i,\eta_i)$为那一段ΔS对应的函数值]

- 当$f(x,y)=1$时, $\int_L ds$为L的长度



- 计算方法

(1) 若曲线弧$L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$

方法步骤: ①写成参数形式 ②套公式. ①投影 ②代入 ③计算

则$\int_L f(x,y)\,dS = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2_{(t)}+y'^2_{(t)}}\,dt$.

(2) 若空间曲线弧$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$

则$\int_\Gamma f(x,y,z)\,dS = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2_{(t)}+y'^2_{(t)}+z'^2_{(t)}}\,dt$

Ⅱ 第一类曲$\boxed{面}$积分. (曲面的质量)

- 当$f(x,y,z)\equiv 1$时, $\iint_\Sigma dS$等于Σ的面积

常用技巧: ①直接法 ②对称性 ③代入Σ ④几何意义

$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\underbrace{\Delta S_i}_{小块面积}$ [曲面的质量]

- 计算方法

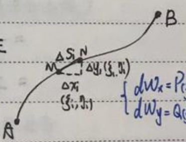
(1) 若光滑曲面Σ: $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$

方法: ①写出Σ的显式方程 $z=z(x,y)$ ②写出在xoy上投影D_{xy} ③套公式.

$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xy}} f[x,y,\underbrace{z(x,y)}_{把z写成x,y的形式}]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,d\sigma$

Ⅲ 第二类曲线积分 (力做功)

- 定向曲线L任一点切向量$\vec{\tau}=\pm(x'(t),\ y'(t))$ $a<b$时取正



$\begin{cases}dW_x=P(\xi_i,\eta_i)\,\Delta x_i\\ dW_y=Q(\xi_i,\eta_i)\,\Delta y_i\end{cases}$

- 计算方法

(1) 若$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ $t:a\to b$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$在L上连续 不用管上下限大小问题

通过计算dx得出这一项.

则$\int_L P(x,y)\boxed{dx}+Q(x,y)\boxed{dy} = \int_a^b\{P[x(t),y(t)]\,\underline{x'(t)}+Q[x(t),y(t)]\,\underline{y'(t)}\}\,dt$

通过计算dy得出.

(2) 若$y=y(x)$, $x:a\to b$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$连续

$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}$

则$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy = \int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]\,y'(x)\}\,dx$. $\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\phi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\phi(t)]\phi'(t)\}\,dt$

- 两类积分联系:

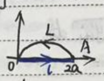
$\int_L P\,dx+Q\,dy = \int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,dS$ [$\cos\alpha$, $\cos\beta$是有向曲线L在(x,y)处的切向量方向余弦]

IV. 格林公式. [二类曲线的补充]

- 单连通区域 —— 没洞；复连通区域 —— 有洞　[观察者沿边界走左手总是在区域D内，则是正向]
- 格林公式：若区域D：① 正向闭曲线L ② $P(x,y)$，及 $Q(x,y)$ 在D上有一阶连续偏导

则 $\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.　考点 $\begin{cases}① L不封闭 \to 补线 \\ ② P、Q不连续 \to 挖洞\end{cases}$

[补线用格林]例：计算 $I=\int_L[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$，$a,b>0$，L是由点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.



解：$I=\oint_{L+l}-\int_l$

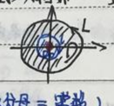
$=\iint_D(b-a)dxdy-\int_0^{2a}(-bx)dx$

$=(b-a)\frac{1}{2}\pi a^2+2a^2b$

[挖洞用格林]例：计算曲线积分 $I=\oint\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中L是一条不经原点闭曲线，沿逆时针

解：① 当 $(0,0)\notin D$ 时，直接用格林 $I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$

② 当 $(0,0)\in D$ 时，



用"挖洞"的思想.

取 l: $x^2+y^2=\varepsilon^2$（一般取分母 = 常数），顺时针

记L和 l 围成D，而 l 围成 D_0

则 $I=\oint_{L+l}-\oint_l=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\oint_l\frac{xdy-ydx}{\varepsilon^2}$　直接把 l 代入.

$=0-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_l xdy-ydx$

$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(-\iint_{D_0}(1-(-1))dxdy\right)$　不是正向所以用加个负号

$=2\pi$

V. 积分与路径(有关)无关

若D是一个单连通区域（前提），$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在D有一阶偏导.

与路径无关 $\overset{充要}{\Longleftrightarrow}$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$　$(x,y\in D)$

[注：一旦证明积分与路径无关，但可按特殊路径（如先水平后竖直的折线）来计算]

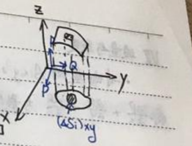
在单连通区域D，$Pdx+Qdy$ 在D内为某一函数 $U(x,y)$ 的全微分 [$du=Pdx+Qdy$] $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，$(x,y)$

[$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$ 或 $U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dx$.] 两种折线，在区域

$(x_0,y_0)\to(x,y_0)\to(x,y)$　　$(x_0,y_0)\to(x_0,y)\to(x,y)$

[第二类积分都是要考虑方向的]

V. 第二类曲面积分



• 定义：$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$ ， $\lambda=\max\{\Delta S_i\}$

物理背景：复杂水流通过复杂面产生的流量，在 x,y,z 三个方向分解。

三个方向合一起 $\Rightarrow \iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$ [与曲面 Σ 的侧有关]

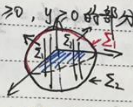
• 计算：设有向曲面 $\Sigma: z=z(x,y)$ ， D_{xy} 是 Σ 在 xoy 面上的投影， $z(x,y)$ 在 D_{xy} 上有连续偏导数

则 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,dxdy$.

$\hookrightarrow$ 前、右、上侧取正 $+$.

取外侧：所有面的法向是一致朝外

例：计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,dxdy$ ，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0$ ， $y\geq 0$ 的部分。



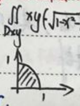
解：投影不能有重合点，否则要分块投影。

法① $\iint\limits_{\Sigma} xyz\,dxdy = \Sigma_1+\Sigma_2$

外侧在 Σ_1 来看是上侧　　在 Σ_2 来看是下侧

$= +\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy + (-1)\iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,dxdy$

$= 2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$



变极 $\rightarrow r\,dr$.

$= \frac{2}{15}$

法②：补 Σ_1 、 Σ_2 与内部的2个面
$x=0$ 面　$y=0$ 面

$I = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} - \iint\limits_{\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_2} = \iiint\limits_{\Omega} xy\,dv - 0 - 0$

$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xy\,dz$

$= \iint\limits_{D_{xy}} xy\cdot 2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$

$= \frac{2}{15}$ [补面用高斯]

• 两类曲面积分联系

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS .$$

[其中 $\cos\alpha$ ， $\cos\beta$ ， $\cos\gamma$ 是有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处法向量的方向余弦]

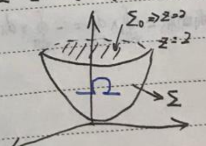
VI. 高斯公式

• 若 ① 曲面 Σ 封闭取外侧　② $P(x,y,z)$ ， $Q(x,y,z)$ ， $R(x,y,z)$ 连续有一阶偏导

则 $\oiint\limits_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

考点：
1° Σ 封闭取外侧 $\rightarrow$ 补面
2° . P.Q.R 连续 $\rightarrow$ 挖洞

例：计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\,dydz - z\,dxdy$ ，其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧。



解：补上一个上平面 Σ_0 使其封闭，则

$I = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} - \iint\limits_{\Sigma_0} = \iiint\limits_{\Omega}(1+(-1))\,dv - \iint\limits_{\Sigma_0} -2\,dxdy$

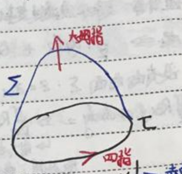
$= 2\iint\limits_{\Sigma_0} dxdy = +2\iint\limits_{D_{xy}} 1\,dxdy = 2\times\pi(2)^2 = 8\pi$.

投影要有符号

Ⅶ. 通量与散度

• 有向量场 $A(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，则 Σ 的通量 $\phi=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$；

称 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 为散度，记为 $\mathrm{div}A(x,y,z)$

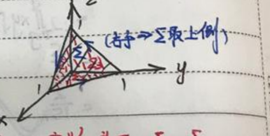


Ⅷ. 斯托克斯公式

有向闭曲线 Γ 和 以Γ为边界的 有向曲面 Σ 符合右手规则

则 $\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ → 法向量

例：计算曲线积分 $\oint_{\Gamma}zdx+xdy+ydz$，其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面截成的三角形边界，它的方向从 z 轴正向往负向看是逆时针.



解：$\oint_{L}zdx+xdy+ydz$

$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}dydz+dzdx+dxdy.$

补面用高斯，补 Σ_1，Σ_2，Σ_3

$=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_3}=\iiint_{\Omega}0dv-(-1)\iint_{D_1}dzdx-(-1)\iint_{D_2}dxdy-(-1)\iint_{D_3}dydz$ Σ上侧 Σ_1左侧 Σ_2下侧 Σ_3后侧

$=\frac{1}{2}\times1\times1\times3=\frac{3}{2}.$

Ⅸ. 环流量与旋度

• 有向量场 $A(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，空间曲线积分 $\overset{\text{(环流量)}}{\phi}=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$

称 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ 为旋度，记 $\mathrm{rot}A(x,y,z)$

Ⅹ. 补充

• D的面积 $=\oint_{\partial D^+}xdy=-\oint_{\partial D^+}ydx=\frac{1}{2}\oint_{\partial D^+}xdy-ydx$

九、无穷级数

I. 常数项级数

• 定义：数列 $u_1, u_2 \cdots u_n \cdots u_{无穷}$ 的各项依次用加号加起来叫无穷级数，记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，记第n项 u_n 叫一般项

• 敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前n项和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和.
若 S_n 有极限，即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 S_n 没有极限，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

• 求和公式：①等差：$S_n = \frac{1}{2}n(a_1+a_n) = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

②等比：$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$

例：证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = A\ (\exists)$

解：前n项和 $S_n = a_1 - a_{n+1}$

则 $\lim_{n\to\infty} S_n \exists \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \exists$

（级数是无穷项求和，和函数是所求得和的结果的函数表示）

则 $\underline{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})\text{收敛} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \exists}$（记）

☆等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} |q|<1\text{时，收敛} \\ |q|\geq 1\text{时，发散} \end{cases}$（记）☆P级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P} \begin{cases} P>1\text{，收敛} \\ P\leq 1\text{，发散} \end{cases}$（记）

△ 常充当 V_n 用于极限判别法

• 性质：$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow$ 发散；$U_n = V_n + W_n$ 且 V_n 收敛、W_n 发散 $\Rightarrow U_n$ 发散.

II. 正项级数及其审敛法.

• 若 $U_n \geq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 为正项级数

△ • $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ 都是正项级数，且 $U_n \leq V_n$（或 $\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow \text{同敛散} \\ 0 \Rightarrow U_n\text{更小} \\ \infty \Rightarrow V_n\text{更小} \end{cases}$）；则 大收敛 → 小收敛；小发散 → 大发散.

• （比值判别法）：$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \rho \begin{cases} <1 \Rightarrow \text{级数收敛} \\ >1 \Rightarrow \text{级数发散} \\ =1 \Rightarrow \text{失效} \end{cases}$ ¦ （根值判别法）$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \rho \begin{cases} <1 \Rightarrow \text{级数收敛} \\ >1 \Rightarrow \text{级数发散} \\ =1 \Rightarrow \text{失效} \end{cases}$

△ 方法的选择：$\sum_{n=1}^{\infty}\boxed{U_n}$
- $n! \to$ 比值
- $n^n \to$ 根值
- 比较及极限形式.

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛 → 级数的一般项必趋于0

[例] 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\,(1-\cos\frac{\pi}{n})$ 的敛散性.

解：由 $\sqrt{n+1}\,(1-\cos\frac{\pi}{n}) \backsim \sqrt{n+1}\cdot\frac{1}{2}(\frac{\pi}{n})^2 \quad (n\to\infty)$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\cdot\frac{1}{2}(\frac{\pi}{n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$ 收敛 $(p>1)$ 原式得证.

[例] 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ 都收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n+V_n)^2$ 也收敛.

解：由 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = 0 \Rightarrow U_n < M\ (n\to\infty)$ 故 $\underbrace{U_n^2}_{\text{小收敛}} = U_n \times U_n < \underbrace{MU_n}_{\text{大收敛}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2$ 收敛.

而 $\underbrace{2U_nV_n}_{\text{小收敛}} \leq \underbrace{U_n^2 + V_n^2}_{\text{大收敛}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2U_nV_n$ 收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(U_n+V_n)^2$ 收敛.

Ⅲ 交错级数

• 若 $u_n > 0$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 为交错级数.

△莱布尼茨判别法 若① $\lim_{n\to\infty}u_n = 0$　② $u_n \geq u_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$

→易　→难：引入求导单调性.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

Ⅳ. 任意项级数

• 若 u_n 任意，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数　[研究方法：先加绝对值]

• 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛　] → u_n 都是收敛

• 条件收敛 + 条件收敛 → 收敛（都有可能）

例. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的收敛性如何.

取 $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$（收敛）

$v_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$　$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1\right)$　此时 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散（收+发=发）

Ⅴ. 幂级数

• 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$，$u_n(x)$ 有共同定义域 I.

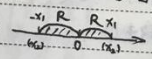
若 $x_0 \in I$，常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 是其收敛点；所有收敛点集合是收敛域.

• 幂级数：$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 称为幂级数.

[illegible]就是 a_n

• 阿贝尔定理：① 若幂级数在 $x = x_1 \neq 0$ 处收敛，则 $|x| < |x_1|$ 的一切 x，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都绝对收敛

② 若幂级数在 $x = x_2$ 处发散，则 $|x| > |x_2|$ 的一切 x，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 都发散

$\Rightarrow$ 

R：收敛半径

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

• 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$.

$\rho = \infty \Rightarrow R = \{0\}$

$\rho = 0 \Rightarrow R$ 为 $(-\infty, +\infty)$

例：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径.　[缺项，$x^0, x^2, x^4\cdots$]

解：$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\right| = 4$

$\Rightarrow R = \sqrt[2]{\frac{1}{\rho}} = \frac{1}{2}$　[x^{an+b}，是几 n 就开几次方]

例：求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛域

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{2^n\cdot n}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=\frac{1}{\rho}=2$

故 $(x-1)$ 的收敛半径 $R=2\Rightarrow$ 收敛区间：$(-1,3)$

$\left.\begin{array}{l}\text{当 } x=-1 \text{ 时，} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n} \text{ 收敛} \\ \text{当 } x=3 \text{ 时，} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ 发散}\end{array}\right\}\Rightarrow$ 收敛域为 $[-1,3)$.

- 幂级数和函数 $S(x)$ 在收敛域 I 上连续，且可积，可导，积分/求导后与原来的幂级数有相同的收敛半径

$$\int_0^x S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1},$$

例：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数

利用 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$-1<x<1$

$\frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}=1+x+x^2+\cdots$

★方法（通法）：求导积分，代这个公式！

解：$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\Rightarrow xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

两边同时求导：$(xS(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，$-1<x<1$

$$\Rightarrow\int_0^x xS(x)\,dx=xS(x)\Big|_0^x=-\ln(1-x)$$

即 $S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)$，$-1<x<1$ 且 $x\neq0$.

$S(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=1+\frac{x}{2}+\cdots\Big|_{x=0}=1$

进行积分，考虑端点：由 $-\frac{1}{x}\ln(1-x)$ 在 $x=-1$ 处连续，且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 在 $x=-1$ 处收敛 $\Rightarrow$ 在 -1 收敛

综上所述，$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & -1\leq x<1 \text{ 且 } x\neq0\\ 1, & x=0.\end{cases}$

VI. 展开成幂级数

- 定义：若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，$x\in I$，称 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的幂级数（麦克劳林）展开式
- 定理：若① $f(x)$ 在 I 上任意阶可导 ② $\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=0$ — 充要条件

  则 $f(x)$ 可展开为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，$n=0,1,2\cdots$ [不常用]

- 重要函数的麦克劳林

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$-\infty<x<+\infty$.

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$-\infty<x<+\infty$

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，$-\infty<x<+\infty$

$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$，$-1<x\leq1$ $\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

△ $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$-1<x<1$

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$，$x\in[-1,1]$

$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n$，$x\in(-1,1)$

• 概率论与数理统计

一、随机事件与概率

Ⅰ. 随机试验：条件 ① 相同条件下重复 ② 结果明确可知，且不止一个 ③ 事先结果不能确定

通过随机试验来研究随机现象，用 E 表示。

Ⅱ. 随机事件：一次试验中可能出现也可能不出现的结果．（事件）

U: Ω 必然事件（一定发生的事件） V: $\varnothing$ 不可能事件（一定不发生的事件）

Ⅲ. 样本空间：每一个最简单，最基本（不可再分）的结果称为基本事件（或样本点），记为 ω；基本事件的全体称为基本事件空间（或样本空间）；随机事件 A 是样本空间 Ω 的子集．

Ⅳ. 古典概型：条件 ① 有限个基本事件 ② 等可能性

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{所含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$$

例：袋中 100 个球，40 个白 60 个黑．

• 先后无放回的概率 = 任取的概率．

① 先后无放回取 20 个，求 $P\{15白5黑\}$ ：任取 20 个 $P(A) = \frac{C_{40}^{15}C_{60}^{5}}{C_{100}^{20}}$

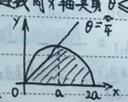
② 先后无放回取 20 个，求 $P\{第20次取白\}$ ：$P(B) = \frac{C_{40}^{1}\,99!}{100!} = \frac{40}{100}$ （抽对概率只关心第 k 次，也叫抓阄模型）

③ 先后有放回取 20 个，求 $P\{15白5黑\}$ ：$P(C) = \frac{C_{20}^{15}40^{15}60^{5}}{100^{20}} = C_{20}^{15}\left(\frac{40}{100}\right)^{15}\left(\frac{60}{100}\right)^{5} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ （二项分布）

Ⅴ. 几何概型．条件 ① 样本空间 Ω 是一个可度量几何区域 ② 等可能性．

$$P(A) = \frac{S_A\text{的几何度量}}{\Omega\text{的几何度量}}.$$

例：随机向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ $(a>0)$ 内投一点，求该点和原点连线同 x 轴夹角 $\theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ 的概率 $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$．



法①：由面积 $\frac{S_{\text{四分之一圆}}+S_{\triangle}}{S_{\text{圆半}}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$

法② $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r\,dr = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta = 2a^2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{2}$

[令 $x=r\cos\theta$; $y=r\sin\theta$]． $S_{\text{所}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r\,dr = \frac{(\pi+2)a^2}{4}$

$$S = \frac{\frac{(\pi+2)a^2}{4}}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

Ⅵ. 重要公式．

▲ 加：$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$; $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

减：$P(A-B) = P(A)-P(AB) = P(A\bar{B})$; 对偶律：$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$ ，$\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}$

▲ 条件概率：已知 A 发生的条件下，B 发生的概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

乘：$P(AB) = P(A)P(B|A)$

全概公式：条件 ① $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n = U$ ； ② $A_iA_j = \varnothing$ $(i\neq j)$

例：把函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数

[解1] 令 $u=x-1$，则 $f(x)=\frac{1}{u^2+6u+8}=\frac{1}{(u+4)(u+2)}=\left(\frac{1}{u+2}-\frac{1}{u+4}\right)\times\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-u}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-u}{4}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n$$

由 $-1<-\frac{x-1}{2}<1$ 且 $-1<-\frac{x-1}{4}<1$ 知 $-1<x<3$

[解2] $f(x)=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}=\frac{1}{4(1+\frac{x-1}{2})}-\frac{1}{8(1+\frac{x-1}{4})}$ 利用 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ (-1<x<1)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n\quad(-1<x<3)$$

VII. 傅里叶级数

- $f(x)$ 在R以 $2l$ 为周期，在 $[-l,l]$ 可积

则 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\ (n=0,1\cdots)$　$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\ (n=1,2\cdots)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶系数

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$ [傅里叶级数]

- 狄利克雷收敛定理

$f(x)$ 是周期为 $2l$ 的函数，若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上满足

①连续或只有有限个第一类间断点 ②至多只有有限个极值点

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛

当 x 是 $f(x)$ 间断点时，级数收敛于 $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ 间断点的和函数用这个算 $\cos n\pi=(-1)^n$

当 x 是 $f(x)$ 的端点时，级数收敛于 $\frac{f(-x^+)+f(x^-)}{2}$

当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$

- 若 $f(x)$ 是奇(偶)函数，则此时傅利叶级数只含正(余)弦项的正(余)弦级数

则事件 B： $P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

贝叶斯公式（逆概公式）： $P(A_j|B)=\dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$ [执果索因] → 结果发生的概率

独立性：若一个事件发生与否不受另一个事件影响，则A，B相互独立

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

• $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

▲例：设事件A、B仅发生一个概率为0.3，且$P(A)+P(B)=0.5$，求A，B至少一个不发生的概率.

解：由题意 $\begin{cases}P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=0.3\\P(A)+P(B)=0.5\end{cases}$ $\Rightarrow$ 求 $P(\bar{A}\cup\bar{B})$

$$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(BA)$$

$$=P(A)+P(B)-2P(AB)=0.3\Rightarrow P(AB)=0.1$$

于是 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(AB)=0.9$.

例：有2箱，一箱内装50件，10件一等品；二箱内装30件，18件一等品。先从2箱中随机挑出一箱，然后从该箱中先后有顺序（不放回）的取2个零件.

(1) 先取出的零件是一等品概率 p

(2) 在先取出的是一等品条件下，后取出的仍是一等品概率 q.

解：(1) 分阶段 (I) 选箱子 $A=\{取第一箱\}$ $\bar{A}=\{取第二箱\}$

(II) 取零件 $B_1=\{先取一等品\}$ $B_2=\{后取一等品\}$

$$\Rightarrow P(B_1)=P(A)P(B_1|A)+P(\bar{A})P(B_1|\bar{A})=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5}$$

(2) 无用 $\begin{cases}P(A|B_1)=\dfrac{P(AB_1)}{P(B_1)}=\dfrac{P(A)P(B_1|A)}{P(B_1)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{4}\\P(\bar{A}|B_1)=\dfrac{P(\bar{A}B_1)}{P(B_1)}=\dfrac{P(\bar{A})P(B_1|\bar{A})}{P(B_1)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

$$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{P(A)P(B_1B_2|A)+P(\bar{A})P(B_1B_2|\bar{A})}{P(B_1)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}}{\frac{2}{5}}=\frac{690}{1421}$$

例：有两批数量相同零件，一批合格100%，另一批25%不合格. 从两批中任取1只，经检验是正品，放回原处，在原所在批再取1只，试求是次品概率.

解：$A=\{第一次第一批\}$ $\bar{A}=\{第一次第二批\}$ $B=\{取正品\}$ $C=\{第二次取第一批\}$

$$\Rightarrow P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{7}{8}$$

于是 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot1}{\frac{7}{8}}=\dfrac{4}{7}$

$P(\bar{A}|B)=1-\dfrac{4}{7}=\dfrac{3}{7}$

$$P(\bar{B})=P(C)P(\bar{B}|C)+P(\bar{C})P(\bar{B}|\bar{C})=\frac{4}{7}\times0+\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{28}.$$

二. 随机变量与概率分布

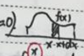
I. 分布函数：设X是随机变量，x是任意实数，称 $F(x)=P\{X\le x\}$ $(x\in R)$ 为随机变量X的分布函数，记为 $X\sim F(x)$.

性质：(1) 单调不减函数 (2) 右连续 (3) $F(-\infty)=0$；$F(+\infty)=1$.

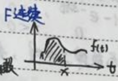
II. 离散型随机变量：X只能取有限个或无限可列个值　F步步阶梯

X	x_1	x_2	⋯	x_n
P	p_1	p_2	⋯	p_n

III. 连续型随机变量（虽原则上不能排除但P=0）



F连续



▲ X的分布函数 $F(x)=P\{-\infty<X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$ 概率密度函数　$P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)\,dx$

△记：X离散 $\Rightarrow X\sim p_i$

X连续 $\Rightarrow X\sim f(x)$

IV. 常见随机变量分布类型

(一) 离散型 (1) 0-1分布. $B(1,p)$　$X\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}$　$E(x)=p$　$D(x)=pq$　$X\sim B(1,p)$

(2) 二项分布 $B(n,p)$：① 互相独立 ② 重复进行n次 ③ $P(A)=p$，$P(\bar{A})=1-p$.　$X\sim B(n,p)$

$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=p\{X=k\}$　$E(x)=np$　$D(x)=npq$

当n很大P很小时

(3) 几何分布：事件A首次发生所需做的实验次数.

$P\{X=k\}=q^{k-1}p$　$X\sim G(p)$

(4) 泊松分布 $P(\lambda)$：某单位时间内，某场合中源源不断的质点来流的个数X

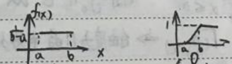
$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$　[$k=0,1,2\cdots$]　[λ—质点来流的强度]　$EX=\lambda$ 期望值　$E(x)=\lambda$　$D(x)=\lambda$

当$N\to\infty$，$\frac{M}{N}\to p$时

(5) 超几何分布：[N个产品，M件正，任取n件，求k件正品的概率]

$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$　$E(x)=\frac{nM}{N}$

(二) 连续性 (1) 均匀分布. $U(a,b)$

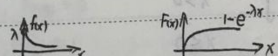


$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx$

$X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$　或 $F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$

则称X在(a,b)上服从均匀分布，记为 $X\sim U(a,b)$　$D(x)=\frac{1}{12}(b-a)^2$　$E(x)=\frac{b+a}{2}$

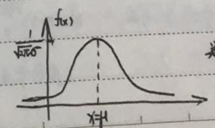
(2) 指数分布 $E(\lambda)$



$X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$　或 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$.　[λ：失效率 $\Rightarrow EX=\frac{1}{\lambda}$]　$X\sim E(\lambda)$　$D(x)=\frac{1}{\lambda^2}$　$E(x)=\frac{1}{\lambda}$

(3) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$

$X\sim f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<\infty$



关于$x=\mu$对称　$E(x)=\mu$　$D(x)=\sigma^2$

若$\mu=0$，$\sigma^2=1$，$X\sim\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ [标准正态分布]

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$

例：3个元件工作状态相互独立，且无故障工作时间服从$\lambda>0$的指数分布，三个元件均无故障工作时，线路工作状态正常，试求电路正常工作时间T的概率分布

解：$T=\min\{X_1, X_2, X_3\}$ 且 $X_i \sim F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$T\sim G(t) \triangleq P\{T\leq t\}$$

$$G(t) = 1-P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}P\{X_3>t\}$$

$$= 1-[1-F(t)]^3 = 1-e^{-3\lambda t}$$

故 $T\sim G(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$

[注]若三个元件中有一个无故障工作时，线路工作状态就正常，求T

$$T\sim G(t)=P\{X_1\leq t, X_2\leq t, X_3\leq t\} = F^3(t) = \begin{cases}(1-e^{-\lambda t})^3, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

例：一水渠出口挡板是边长为1(单位)的正方形，已知初始水面高$\frac{3}{4}$，现发现挡板某一部位出现一个小孔(任一位置)，水流过小孔流出，求剩余液面高X的分布函数$F(x)$

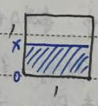
解：$F(x) \triangleq P\{X\leq x\}$，x取遍$-\infty$至$+\infty$.

① $x<0$，$F(x)=P\{X\leq x\}=0$

② $x\geq\frac{3}{4}$，$F(x)=P\{X\leq x\}=1$

③ $0\leq x<\frac{3}{4}$，$F(x)=P\{\underbrace{0\leq X\leq x}_{}\}=\frac{x\cdot 1}{1\cdot 1}=x$

小孔出现在水面下部且位于边长为x和1的长方形内



故 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\leq x<\frac{3}{4}\\ 1, & x\geq\frac{3}{4}\end{cases}$

(4) Γ分布

$$p(x)=\begin{cases}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases} \qquad \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$

$E(x)=\frac{\alpha}{\beta}$ $D(x)=\frac{\alpha}{\beta^2}$

$\Gamma(1,\beta)\Rightarrow$ 指数分布；$\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})\Rightarrow$ 自由度为n的卡方分布 $X^2_{(n)}$

(5) 韦布尔(Weibull)分布.

$$p(x)=\begin{cases}m\frac{x^{m-1}}{\eta^m}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right\}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

$X\sim W(m,\eta)$

V. 随机变量函数的分布

(1) 概念：设X为随机变量，函数 $y=g(x)$，则以随机变量X作为自变量的函数 $Y=g(X)$ 也是随机变量，称之为随机变量X的函数。

(2) 随机变量函数的分布

① 离散型：简单，注意合并相同项即可。

② 连续型：$F_X(x) \triangleq P\{X \le x\}$ 　　 $F_{狗}(猫) \triangleq P\{狗 \le 猫\}$ 　 $F_{X^2}(y)=P\{X^2 \le y\}$

知 $X \sim f_X(x)$；$X \sim F_X(x)$；$Y=g(x)$

求 $Y \sim f_Y(y)$；$Y \sim F_Y(y)$

★方法：$Y \sim F_Y(y) \triangleq P\{Y \le y\} = P\{g(x) \le y\} \xlongequal{解不等式} P\{X \in I_y\} = \int_{I_y} f_X(x)\,dx$

$f_Y(y) = F_Y'(y)$

★△ • 例：设随机变量X的概率密度为 $f_X(x)=\frac{k}{1+x^2}$ $(x \in R)$，求

(1) 常数k

(2) 随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(x)$

解 (1) $k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = 1 \Rightarrow k\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = k\pi = 1 \Rightarrow k=\frac{1}{\pi}$

(2) 故 $X \sim f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$，$x \in R$

$Y = 1-\sqrt[3]{X}$

$Y \sim F_Y(y) \triangleq P\{Y \le \underset{\text{取遍}-\infty\text{至}+\infty}{y}\} = P\{1-\sqrt[3]{X} \le y\} = P\{X \ge (1-y)^3\} = \int_{(1-y)^3}^{\infty} f_X(x)\,dx$

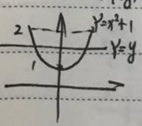
$= \int_{(1-y)^3}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan(1-y)^3\right]$

$Y \sim f_Y(y) = F_Y'(y) = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{3(1-y)^2\cdot(-1)}{1+(1-y)^6} = \frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}$，$y \in R$.

• 例：设 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$ 　令 $Y=X^2+1$，求 $Y \sim F_Y(y)$

解：画图，数形结合来做。

$F_Y(y) \triangleq P\{Y \le y\} = P\{X^2+1 \le y\}$ → 曲线 $Y=g(x)$ 在直线 $Y=y$ 下方



① $y<1$，$F_Y(y)=0$

② $y \ge 2$，$F_Y(y)=1$

③ $1 \le y < 2$，$F_Y(y) = P\{X^2+1 \le y\} = P\{-\sqrt{y-1} \le x \le \sqrt{y-1}\}$

$= \int_{-\sqrt{y-1}}^{0}(1+x)\,dx + \int_0^{\sqrt{y-1}}(1-x)\,dx = 2\sqrt{y-1}-(y-1)$

故 $Y \sim F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<1 \\ 2\sqrt{y-1}-y+1, & 1 \le y < 2 \\ 1, & y \ge 2 \end{cases}$ 　[等号跟着大于号走]

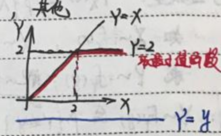
若求 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y<2\\ 0, & 其它\end{cases}$

取不了等，直接去掉 $f(x)$ 是非常灵活的一个点取值不影响，都可以根据结果微调点.

• 例：设一设备开机后无故障工作时间 X 服从指数分布，平均无故障工作时间为 5小时，设备定时开机，出现故障自动关机，而在无故障工作的情况下 2h 便自动关机. 求设备每次开机无故障工作时间 Y 的分布函数.

解：$Y=\min\{X,2\}$ $\quad X\sim F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{5}x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

求 $Y\sim F_Y(y)\Rightarrow F_Y(y)\triangleq P\{Y\le y\}$ → 画图



① $y<0$，$F_Y(y)=0$

② $y\geq 2$，$F_Y(y)=1$

③ $0\le y<2$，$F_Y(y)=P\{0\le X\le y\}=P\{X\le y\}=F_X(y)=1-e^{-\frac{1}{5}y}$

故 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-\frac{1}{5}y}, & 0\le y<2\\ 1, & y\geq 2.\end{cases}$

三、随机变量的数字特征

$E(kX+b)=kE(X)+b$

I. 随机变量函数的期望公式：设 X 的密度 $p(x)$，Y是X的函数：$Y=f(x)$，下式右边时收敛则

$$E[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(x)dx$$

• 设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，求 $E(X^n)=\begin{cases}0, & n为奇\\ \sigma^n(n-1)!!, & n为偶.\end{cases}$

II. 方差 $\quad D(kX+b)=k^2D(X)$

(1) 离散型：若概率分布为 $P(X=x_k)=P_k$，$k=1,2,\cdots$

则方差 $D(X)=\sum_k[x_k-E(X)]^2P_k$

(2) 连续型：若 X 的密度为 $P(x)$.

则方差 $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2P(x)dx$

$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2$ 平方的期望减期望的平方

X 的方差就是 $Y=[X-E(X)]^2$ 的均值.

III. 切比雪夫不等式.

$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\quad(\varepsilon>0)$

Ⅳ. 名词解释

- $E(X^k)$ $(k=1,2\cdots)$ 为X的k阶原点矩，记为ν_k；$E(X-E(X))^k$ $(k=1,2\cdots)$ 为X的k阶中心矩，记为μ_k
- x_p 是随机变量X的P分位数。

四. 随机向量

Ⅰ. 多维随机变量及其分布

1° X一维，$Y=g(X)$，一维

2° (X,Y) 二维，$Z=g(X,Y)$，一维。

[注] $Z=\begin{smallmatrix}\max\\\min\end{smallmatrix}\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

概念：二维r.v. (X,Y)，分布函数 $F(x,y)\triangleq\{X\le x, Y\le y\}$；边缘分布函数若 $(X,Y)\sim F(x,y)$

$F_X(x)\triangleq P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<+\infty\}=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$

$F_Y(y)\triangleq P\{Y\le y\}=P\{X<+\infty, x\le x\}=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$

若 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\Leftrightarrow X,Y$互相独立。

(1) 离散型

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	
x_1	P_{11}	P_{12}	$\cdots$	$P_{1\cdot}$
x_2	P_{21}	P_{22}	$\cdots$	$P_{2\cdot}$
x_3	P_{31}	P_{32}	$\cdots$	$P_{3\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\cdots$	
	$P_{\cdot1}$	$P_{\cdot2}$		

X的边缘分布律

Y的边缘分布律。

$(X,Y)\sim P_{ij}$ 联合分布律。

$P_{ij}=P\{X=x_i, Y=y_i\}$

$P_{3\cdot}=P_{31}+P_{32}+\cdots P_{3n}$

$P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}=P_{ij}\Leftrightarrow X,Y$独立。

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\leftarrow$ 条件 $=\frac{联合}{边缘}$ 即 $P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$

- 例：设 $X_1\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\\frac14&\frac12&\frac14\end{pmatrix}$ $X_2\sim\begin{pmatrix}0&1\\\frac12&\frac12\end{pmatrix}$ 且 $P(X_1X_2=0)=1$

(1) 求 $(X_1,X_2)\sim P_{ij}$ (2) 求 $P(X_2=1|X_1=0)$ (3) X_1,X_2 相互独立么。

[分析] 联合分布律 P_{ij} 是充分条件 $\Rightarrow P_{i\cdot}$, $\Rightarrow P_{\cdot j}$, $\Rightarrow$ 条件，但知边缘不能推联合分布律，还需其它条件。

X_2 \ X_1	-1	0	1	
0	$\frac14$	0	$\frac14$	$\frac12$
1	0	$\frac12$	0	$\frac12$
	$\frac14$	$\frac12$	$\frac14$	1

$P(X_1X_2=0)=1\Rightarrow P(X_1,X_2\neq0)=0\Rightarrow$ 表中得出2个0

(2) $P(X_2=1|X_1=0)=\frac{P(X_1=0,X_2=1)}{P(X_1=0)}=\frac{\frac12}{\frac12}=1$

(3) 不独立。

$$\begin{cases} E[f(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, p(x,y)\, dx dy \\ P\{(X,Y)\in D\} = \iint_D p(x,y)\, dx dy \quad (\text{二重积分}) \end{cases}$$

(2) 连续型　r.v. $(X,Y) \sim f(x,y)$ 联合概率密度.

① 均匀分布

如 $(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$

称 $(X,Y) \sim D$ 上的均匀分布 $\Leftrightarrow$ 二维几何概型

边缘密度：$X \sim f_X(x)$

$$\begin{cases} f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy & \to \text{由图得，有 } x \text{ 的表达式（垂直穿过D）} \quad (x\text{范围}) \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx & \to \text{由图得 } y \text{ 的表达式（水平穿过D）} \quad (y\text{范围}) \end{cases}$$

② 正态分布

$(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

Ⅰ $\Rightarrow \begin{cases} X \sim N,\ Y \sim N \\ aX \pm bY \sim N \\ \text{独立} \Rightarrow \text{不相关} \end{cases}$

Ⅱ. 若 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 相互独立且均服从 $N \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a X_i \sim N$

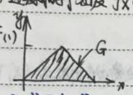
独立性：$f_X(x) f_Y(y) = f(x,y) \Leftrightarrow X, Y$ 独立

条件概率密度：$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ （x,y的取值范围）　条件 $= \frac{\text{联合}}{\text{边缘}}$

即有等号直接把条件代入公式，其余的再积分
（① 都是不等号 ⇒ 2个二重积分
② $y = \cdots$，代入原式 $f_{X|Y}(x|y)$ 再对x求积分）

例：已知二维随机变量 (X,Y) 在G上服从均匀分布，G由直线 $x-y=0$，$x+y=2$ 与 $y=0$ 围成，求 (1) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$　(2) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$

解：(1)



$(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} = 1, & (x,y)\in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

方法：求谁不积谁，不积先定限，限内画条线，先交写下限，后交写上限.

$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} \int_0^x 1\, dy, & 0<x<1 \\ \int_0^{2-x} 1\, dy, & 1<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 2-x, & 1<x<2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$Y \sim f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^{2-y} 1\, dx, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2-2y, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ [在 $0<y<1$ 时] $= \frac{1}{2-2y}$

故 $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2-2y}, & 0<y<1,\ y<x<2-y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

Ⅱ. 随机向量：n个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的整体 $\xi = (X_1, X_2 \cdots X_n)$ 为n维随机向量

Ⅲ. 数字特征

(1) 协方差 $Cov(X,Y)$ 或 $\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [x-E(X)][y-E(Y)]\, p(x,y)\, dx dy$

设 $DX, DY > 0$，则 $Cov(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY)$ 为协方差.

$\underset{\sigma_{xy}}{cov_{xy}} = E(X-EX)(Y-EY) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ 乘积的期望减期望的乘积.

(2) 相关系数 ρ_{XY} [刻画了X,Y间线性关系的近似程度，$|\rho|$ 接近1，线性越明显]

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{XX}}\sqrt{\sigma_{YY}}}$$

例：设A，B为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$

令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}$ $\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$

求(1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布　(2) X,Y 的相关系数 ρ_{XY}　(3) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布。

解：(1)

X \ Y	0	1	
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$P_{22}=P(X=1,Y=1)=P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{12}$

$P_{21}=P(X=1,Y=0)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$

$P_{12}=P(X=0,Y=1)=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$

P_{11} 由归一性得 $\frac{2}{3}$

(2) $E(X)=0\cdot\frac{3}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$　$E(Y)=0\cdot\frac{5}{6}+1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

$E(X^2)=0^2\cdot\frac{3}{4}+1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$　$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{5}{6}+1^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow DX=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{3}{16}$；$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{36}$；★$E(XY)=0\cdot0\cdot\frac{2}{3}+0\cdot1\cdot\frac{1}{12}+1\cdot0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot1\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$

$\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{EXY-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$

(3)

IV. 二维正态分布

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

V. 两个随机变量的函数的分布

(1) 和的分布，知 (X,Y) 的联合密度 $p(x,y)$，求 $Z=X+Y$ 的密度，写成Z的分段形式（把Z取值区域写出）

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{p(x,z-x)}_{①\text{画图}}dx$$

②上下限是关于Z的式子，画出范围来积分求解

瑞利分布：X,Y 相互独立且服从相同的分布 $N(0,1)$

则 $\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布：$p(z)=\begin{cases}ze^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0\\ 0, & z\leq0\end{cases}$　$[Z=\sqrt{x^2+y^2}]$

(2) 设 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2$ 相互独立

$\Rightarrow$ ① $X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$；② $\frac{X_1+X_2}{2}\sim N\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{2},\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{4}\right)$

③ $X_1-X_2\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

VI. 随机向量数字特征（对III的补充）

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm\overbrace{2E\{[X-E(X)][(Y-E(Y)]\}}^{6xy}$

当 X,Y 独立时：$E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$；$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

注意条件

• $E(X)$，$D(X)$ 求法与前面一样，只是由 $\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)dx$ 变成 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,p(x,y)\,dxdy$

VII. 条件分布与条件期望

(1) 条件分布函数：设对任何 $\varepsilon>0$，$P(y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)>0$，若极限存在，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}P(X\le x\mid y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)$ 则称此为 $Y=y$ 条件下 X 的条件分布函数，记作 $P(X\le x\mid Y=y)$ 或 $F_{X|Y}(x\mid y)$

即 $F_{X|Y}(x\mid y)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}P(X\le x\mid y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)$

[1] 离散型

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{\sum\limits_{k\ge1}P_{kj}}\quad(i=1,2\cdots)$$

[2] 连续型：

$$P_{X|Y}(x\mid y)=\frac{P(x,y)}{P_Y(y)}\qquad\left[\text{注：}P_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)\,dx\right]$$

$Y=y$ 的条件下 X 的条件期望：

$$E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,P_{X|Y}(x\mid y)\,dx=\frac{1}{P_Y(y)}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,P(x,y)\,dx$$

$$▲\ E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X\mid Y=y)\,P_Y(y)\,dy.$$

- 大数定律：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n\cdots$ 是独立同分布的随机变量列，且 $E(X_1)$，$D(X_1)$ 存在，则对任何 $\varepsilon>0$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-E(X_1)\right|\ge\varepsilon\right\}=0$　[其中 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$]

含义：只要 n 充分大，算术平均值 $\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ 以很大的概率取值接近于期望.

$P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=E(X_1)\right\}=1$　[强大数定律]

- 中心极限定理：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量列，而且 $E(X_1)$，$D(X_1)$ 存在，$D(X_1)\ne0$ 则对一切实数 $a<b$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{a<\frac{S_n-nE(X_1)}{\sqrt{nD(X_1)}}<b\right\}=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du.\qquad[\text{这里 }S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n]$$

含义：只要 n 充分大，随机变量 $\frac{\overline{X}-E(X_1)}{\sqrt{D(X_1)/n}}$ 就近似地服从标准正态分布，从而 $\overline{X}$ 近似地服从正态分布.

<数理统计初步>

I. 总体与样本.

(1) 总体：研究对象的某个指标的全体 $X\sim F_{(x)}$;

(2) 样本：简单随机样本 $X_i\overset{iid}{\sim}F$.

II. 矩估计 $\hat{\theta}$ [求估计量，要大写 X]

$EX=\overline{X}\triangleq\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 均值

VIII. 大数定律与中心极限

- 依概率收敛：$\forall \varepsilon > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$

例：设 $\{X_n\}$，$X_n \sim f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$，$-\infty < x < +\infty$，证明 $X_n \xrightarrow{P} 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - 0| < \varepsilon\} = 1$

解：$P\{-\varepsilon < X_n < \varepsilon\} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \arctan nx \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \arctan n\varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \arctan n\varepsilon = 1$$

- 切比雪夫大数定律：① 相互独立 ② 方差有上界.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} a = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

伯努利大数定律.

$$\frac{U_n}{n} \xrightarrow{P} p.$$

辛钦大数定律：① 独立 ② 同分布 ③ 期望存在 EX_n，μ

则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

▲ 总结：所有大数定律结论 —— 均值依概率收敛到自己的期望 $\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

例：设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1, X_2 \cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 $\frac{1}{2}$

解：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = \left(\frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

- 中心极限定理 $(n\to\infty)$

不论 $X_i \overset{iid}{\sim} F(\mu, \sigma^2)$ [▲独立同分布于什么分布]，$\mu = EX_i$，$\sigma^2 = DX_i$

只要把 X_i 加起来 $\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{\text{近似服从}}{\overset{n\to\infty}{\sim}} \underset{\text{正态分布}}{N} (n\mu, n\sigma^2)$

$\xrightarrow{\text{标准化}} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{X - EX}{\sqrt{DX}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$ [解题]

由已知 $\xrightarrow{\text{推}} P\left\{a < \sum_{i=1}^{n} X_i < b\right\} =$

五. 数理统计

I. 统计量：样本的函数，常用统计量有

(1) 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(2) 样本方差：$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_i^2 - n\bar{X}^2)$ [标准差开根号即得]

(3) 样本k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \ (k = 1, 2, \cdots)$

(4) 样本k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k \ (k = 1, 2 \cdots)$

II. 常用性质

$$\left.\begin{aligned} EX_i &= \mu \\ DX_i &= \sigma^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} E\bar{X} &= EX = \mu \\ D\bar{X} &= \frac{1}{n}DX = \frac{1}{n}\sigma^2 \end{aligned}$$

Ⅱ. 统计量的数字特征（与前一章的数字特征完全相同）

例：设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ $(n>2)$ 为独立同分布的随机变量，且均服从正态分布 $N(0,1)$，记作 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2\cdots,n$ 求.

(1) Y_i 的方法 DY_i　(2) Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1,Y_n)$　(3) $P\{Y_1+Y_n\leq 0\}$

解：(1) $DY_i=D(X_i-\overline{X})=DX_i+D\overline{X}-2cov(X_i,\overline{X})$

$$DX_i=1\ ;\ D\overline{X}=D\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n^2}D(1+1+1+\cdots+1)=\frac{1}{n}$$

$$cov(X_i,\overline{X})=\frac{1}{n}cov(X_i,X_i)=\frac{1}{n}DX_i=\frac{1}{n}\implies DY_i=1-\frac{1}{n}.$$

(2) $cov(Y_1,Y_n)=cov(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})=cov(X_1-\overline{X},X_n)-cov(X_1-\overline{X},\overline{X})$

$$=cov(X_1,X_n)-cov(\overline{X},X_n)-cov(X_1,\overline{X})+cov(\overline{X},\overline{X})$$

$$=-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}$$

(3) $Y_1+Y_n=X_1-\overline{X}+X_n-\overline{X}=\left(1-\frac{2}{n}\right)X_1+\left(1-\frac{2}{n}\right)X_n-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i\sim N$

$$P\{Y_1+Y_n\}=\frac{1}{2}$$

Ⅲ. 点估计和评价标准

1. 矩估计

(1) 对于一个参数，用 $\overline{X}\overset{令}{=}EX$

例：设 $X\sim f(x,\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$\theta$ 未知，求 θ 的矩估计量

量 → 大写 $\overline{X}$
值 → 小写 $\overline{x}$

解：$\overline{X}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)\,dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}x^{\theta+2}\Big|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2}$

令 $\overline{X}=\frac{\theta+1}{\theta+2}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

(2) 对于两个参数，用 $\begin{cases}① \overline{X}\overset{令}{=}EX\\ ② \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\overset{令}{=}E(X^2)\end{cases}$

例：设总体 $X\sim f(x,\theta,\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$　由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，求 λ，θ 的矩估计量.

解：① 抽样 $\overline{X}$，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　② 求 EX

$$EX=\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}dx\ \underset{(二换)}{\overset{令x-\theta=t}{=\!=\!=}}\ \int_0^{+\infty}\frac{\theta+t}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\theta}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt+\int_0^{+\infty}\frac{t}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt=\theta+\lambda$$

$$EX^2=\int_{\theta}^{+\infty}x^2\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}dx=\theta^2\Gamma(1)+2\lambda\theta\Gamma(2)+\lambda^2\Gamma(3)=\theta^2+2\lambda\theta+2\lambda^2$$

$$令\begin{cases}\overline{X}=\lambda+\theta\\ \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}X_i^2=\theta^2+2\lambda\theta+2\lambda^2\end{cases}\implies\begin{cases}\hat{\lambda}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2}\\ \hat{\theta}=\overline{X}-\hat{\lambda}\end{cases}$$

2. 最大似然估计

参数 = ? 时，观测值出现的 P 最大.

对P即$f(x)$连乘.

方法. (1) 写 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}P(x_i,\theta) \\ \prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)\end{cases}$ 连乘, 例如 $\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2\cdots a_n$

(2) 令 $\frac{dL}{d\theta}=0$ 或 $\frac{d\ln L}{d\theta}=0 \Rightarrow \hat{\theta}$.

[即L取最大值时的$\hat{\theta}$的值]

例: 设X的分布律 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta\end{pmatrix}$, 其中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 是未知参数, 从总体X中抽取容量为8的一组样本, 其样本值为 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3. 求x矩估计和最大似然估计

解: ① $L(\theta)=(1-2\theta)^4\cdot\theta^2\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{6}{\theta}+\frac{2}{1-\theta}(-1)+\frac{4}{1-2\theta}(-2)\overset{令}{=}0\Rightarrow 12\theta^2-14\theta+3=0$

$\theta=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$ (舍去不合范围) $\Rightarrow \hat{\theta}_L=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$ (最大似然估计)

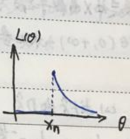
② $\bar{x}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i=2$; $EX=2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta)=3-4\theta\overset{令}{=}2\Rightarrow\hat{\theta}_M=\frac{1}{4}$ (矩估计)

例: 设总体X在区间 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体X的简单随机样本, $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

(1) 求θ的矩估计量, 最大似然估计量.

解: ① $EX=\frac{0+\theta}{2}\triangleq\bar{X}\Rightarrow\hat{\theta}_M=2\bar{X}$

② $L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & 0\le x_1,x_2,\cdots,x_i\le\theta. \\ 0, & 其他\end{cases}$



故由图象单调性知, $\hat{\theta}_L=X_{(n)}$ 时, L取max.

3. 估计量的评价.

(1) 无偏性: 给出$\hat{\theta}$, 若$E\hat{\theta}=\theta$, 称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量.

(2) 有效性: 若$E\hat{\theta}_1=\theta$, $E\hat{\theta}_2=\theta$, 当$D\hat{\theta}_1<D\hat{\theta}_2$时, 称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

(3) 一致性 (只针对大样本): 当$\forall\varepsilon>0$有, $\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$. 即$\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$时, 称$\hat{\theta}$为θ的一致估计.

例 (上一个题) (2) 求常数a、b, 使 $\theta_1=a\bar{X}$, $\theta_2=bX_{(n)}$ 均为θ的无偏估计, 并比较其有效性.

$\begin{cases}EX_i=\frac{\theta}{2} \\ DX_i=\frac{\theta^2}{12}\end{cases}$ (3) 应用切比雪夫不等式, 试证θ_1, θ_2均为θ的一致(相合)估计.

解: (2) $E\hat{\theta}_1=\theta$; $Ea\bar{X}=aE\bar{X}=aEX_i=a\cdot\frac{\theta}{2}=\theta\Rightarrow a=2$

$E\hat{\theta}_2=\theta$; $EbX_n=bEX_{(n)}=\frac{bn}{n+1}\cdot\theta=\theta\Rightarrow b=\frac{n+1}{n}$.

其中 $EX_{(n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{(n)}(x)dx=\int_0^\theta x\cdot n\cdot(\frac{x}{\theta})^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}dx=\frac{n\theta}{n+1}$.

$F_{(n)}(x)=[F(x)]^n\rightarrow f_{(n)}(x)=F_{(n)}'(x)=n[F(x)]^{n-1}\cdot f(x)$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta \\ 0, & 其他\end{cases}$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0 \\ \frac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta \\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$

$\Longrightarrow f_{(n)}(x)=\begin{cases}n\cdot(\frac{x}{\theta})^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta \\ 0, & 其他\end{cases}$

故 $\hat{\theta}_1=2\bar{X}$; $\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

$D\hat{\theta}_1 = D(2\bar{X}) = 4D(\bar{x}) = 4\cdot\frac{1}{n}DX_i = \frac{\theta^2}{3n}$;

$D\hat{\theta}_2 = D(\frac{n+1}{n}X_{(n)}) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot D(X_n)$; 其中 $DX_{(n)} = EX_{(n)}^2 - (EX_{(n)})^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$ $\Rightarrow D\hat{\theta}_2 = \frac{1}{(n+2)n}\theta^2$

$EX_{(n)}^2 = \int_0^\theta x^2\cdot n\cdot(\frac{x}{\theta})^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}\,dx = \frac{n\theta^2}{n+2}$

当 $n>1$ 时，$\frac{\theta^2}{3n} > \frac{\theta^2}{n(n+2)}$，故 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

(3) 切比雪夫：$P(|X-EX|\geq\varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$ ，$\forall\varepsilon>0$

① θ_1：$0 \leq P(|\hat{\theta}_1-\theta|\geq\varepsilon) \leq \frac{\frac{\theta^2}{3n}}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{3\varepsilon^2\cdot n} = 0$

由夹逼准则，$P(|\hat{\theta}_1-\theta|\geq\varepsilon)=0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 \xrightarrow{P} \theta$

② θ_2：$0 \leq P(|\hat{\theta}_2-\theta|\geq\varepsilon) \leq \frac{\frac{\theta^2}{n(n+2)}}{\varepsilon^2} = \frac{\theta^2}{\varepsilon^2 n(n+2)} \to 0$

由夹逼准则，$P(|\hat{\theta}_2-\theta|\geq\varepsilon)=0 \Rightarrow \hat{\theta}_2 \xrightarrow{P} \theta$.

例：设总体X的概率密度为 $f(x;\sigma) = \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$，$-\infty<x<+\infty$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体X的简单随机样本，记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(1) 求 $\hat{\sigma}$ (2) 求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$ (3) 是否存在实数 a，使得对于 $\forall\varepsilon>0$，都有 $\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\sigma}-a|\geq\varepsilon\}=0$?

解：(1) $L(\sigma) = \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_1|}{\sigma}}\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_2|}{\sigma}}\cdots\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_n|}{\sigma}}$

$= \frac{1}{(2\sigma)^n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^n|x_i|}$

$\Rightarrow \ln L(\sigma) = -n\ln 2 - n\ln\sigma - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^n|x_i| \Rightarrow \frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma} = -n\cdot\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n|x_i| \overset{令}{=} 0$

$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|x_i|$，故 $\hat{\sigma}_L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|x_i|$

(2) $E\hat{\sigma} = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|x_i| = \frac{1}{n}E\sum_{i=1}^n|x_i| = E|x_i| = E|X|$

其中 $E|X| = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx = 2\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx$

$= \sigma\int_0^{+\infty}(\frac{x}{\sigma})^{2-1}e^{-\frac{x}{\sigma}}d\frac{x}{\sigma} = \sigma\cdot\Gamma(2) = \sigma$

$D\hat{\sigma} = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|x_i|) = \frac{1}{n^2}D\sum_{i=1}^n|x_i| = \frac{1}{n}D|X|$

$D|X| = E|X|^2 - (E|X|)^2 = 2\sigma^2-\sigma^2 = \sigma^2$

$\Rightarrow D\hat{\sigma} = \frac{\sigma^2}{n}$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx = \sigma^2\int_0^{+\infty}(\frac{x}{\sigma})^{3-1}e^{-\frac{x}{\sigma}}d\frac{x}{\sigma} = \sigma^2\Gamma(3) = 2\sigma^2$

(3) $0\leq P\{|\hat{\sigma}-\sigma|\geq\varepsilon\} \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\cdot n} \to 0$

由夹逼准则，$P\{|\hat{\sigma}-\sigma|\geq\varepsilon\}=0 \Rightarrow$ 故 $a=\sigma$

• 置信区间：$[\bar{X}-\overset{查表}{\lambda}\sqrt{\frac{S^2}{n}}, \bar{X}+\lambda\sqrt{\frac{S^2}{n}}]$ (期望)　　$[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}{\lambda_2}}, \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}{\lambda_1}}]$

$[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)]$

▲ 公式与知识点补充.

I. 积分导数混合公式.

$[\int f(x)\,dx]' = f(x)$

$[\int_a^b f(x)\,dx]' = 0$

$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

$\int_y^z f'(x)\,dx = f(z) - f(y)$ <先导后积>

$[\int_{y(x)}^{z(x)} f(x)\,dx]' = f(z)\cdot z'(x) - f(y)\cdot y'(x)$ <先积后导>

II. 极限存在但不连续

极限存在但不连续 $f(x) = \frac{x^2}{x}$

连续但不可导 $f(x) = |x|$

连续 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

III. 有理分式的拆解技巧

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b};$$

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c}$$

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)^2} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{(x+b)^2}$$

$$\frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)} = \frac{Ax+B}{x^2+ax+b} + \frac{Cx+D}{x^2+cx+d}$$

$$\frac{1}{(x+a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

☆补充：① 分母中若有因式 $(x-a)^k$，则分解后：$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_k}{x-a}$ （A为常数）

② 分母中若有 $(x^2+px+q)^k$，则分解后有：$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \cdots + \frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$

IV. 重要反常积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

V. 和差化积

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(a\pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$

$\cos(a\pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$

$\tan(a\pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b}$